

ПРОЦЕСС «БЛУЖДЕНИЯ ПО СФЕРАМ»

§ 2.1. Вводные замечания

В предыдущей главе были рассмотрены вероятностные представления решений некоторых краевых задач винеровскими интегралами. Эти представления дают возможность оценивать такие решения путем моделирования винеровского процесса на ЭВМ. Однако строить винеровские траектории можно только приближенно, например, заменяя их кусочно-линейными траекториями по формуле (6.10). Подробно методы приближенного построения винеровского процесса и соответствующие оценки винеровских интегралов будут рассмотрены в гл. 6. Там, в частности, показано, что при достаточно широких предположениях относительно осредняемого функционала трудоемкость алгоритма, основанного на кусочно-линейной аппроксимации процесса, определяется величиной ε^{-3} , где ε — требуемая погрешность в оценке решения. Эта оценка трудоемкости связана с необходимостью построения узловых значений траектории с шагом $\Delta t \sim \varepsilon$.

Специфика винеровских интегралов, выражающих решения краевых задач, иногда позволяет для их оценки строить траекторию процесса менее подробно. Например, при оценке решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа с помощью представления (см. § 1.3)

$$u(P) = M[\varphi(\xi_P(\tau))],$$

достаточно моделировать выход винеровского процесса $\xi_P(t)$ на границу данной области. Это можно делать приближенно, моделируя последовательно выход траектории из максимальных сфер, целиком лежащих внутри области, причем центром очередной сферы является предыдущая точка выхода. Далее будет показано, что при некоторых предположениях трудоемкость такого алгоритма определяется величиной $c|\ln \varepsilon|/\varepsilon^2$, т. е. асимптотически существенно меньше трудоемкости алгоритма, основанного на кусочно-линейной аппроксимации винеровского процесса.

Из сказанного ясно, что вероятностное решение некоторых краевых задач можно связать с цепью Маркова, которую мы будем называть «блужданием по сферам» (иначе ее называют также «сферическим процессом»). Впервые такой процесс ввел, по-видимому, Дж. Браун для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В статье (Мюллер, 1956) подробно исследуются свойства процесса «блуждания по сферам» на основе некоторых свойств винеровского процесса.

На первый взгляд кажется, что вероятностное решение краевых задач для уравнения $\Delta u - cu = -g$ нельзя построить, пользуясь только «блужданием по сферам», так как выражение (1.19) зависит от поведения винеровской траектории внутри сфер. Однако это все-таки оказалось возможным благодаря использованию «частичного осреднения» (Елепов, Михайлов, 1969; Кронберг, 1976) и специальных интегральных уравнений второго рода (Елепов, Михайлов, 1973). Поэтому в данной главе рассматривается непосредственно процесс «блуждания по сферам», который значительно проще винеровского.

§ 2.2. Определение и простейшие свойства «блуждания по сферам»

Введем следующие обозначения:

D' — замыкание области D ;

$d(P)$ — расстояние от точки P до границы $\Gamma(D)$ области D ;

$\Gamma_\varepsilon - \varepsilon$ — окрестность границы Γ ; $\Gamma_\varepsilon = \{P \in D' ; d(P) < \varepsilon\}$;

$S(P) = \{Q \in D' : |Q - P| = d(P)\}$ — максимальная из сфер с центром в точке P , целиком лежащих в D' .

В процессе «блуждания по сферам» очередная точка P_{k+1} выбирается равномерно по поверхности сферы $S(P_k)$; процесс обрывается, если точка попадает в Γ_ε .

Обозначим через $s(P, \varepsilon)$ — поверхность той части сферы $S(P)$, которая принадлежит множеству Γ_ε . Проведем сферу S_ε радиуса ε с центром в точке Q касания границы Γ сферой $S(P)$ (рис. 1). Тогда площадь части сферы $S(P)$, целиком лежащей внутри S_ε , равна $\pi\varepsilon^2$. Отсюда получаем следующую оценку снизу для вероят-

ности попадания очередной точки в Γ_ε :

$$\frac{S(P, \varepsilon)}{4\pi d^2(P)} \geq \frac{\pi\varepsilon^2}{4\pi d^2(P)} \geq \geq \frac{\varepsilon^2}{4d_{\max}^2} = v(\varepsilon), \quad (2.1)$$

где d_{\max} — точная верхняя граница радиусов сфер, целиком лежащих в D .

Дадим теперь точное определение процесса «блуждания по сферам». Зададим цепь Маркова $\{P_n\}$ следующими характеристиками: $r_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - P_0)$ — плотность начального распределения (т. е. цепь «выходит» из точки P_0); $r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta\mathbf{r}(\mathbf{r}')$ — плотность перехода из \mathbf{r} в \mathbf{r}' , представляющая собой обобщенную трехмерную плотность равномерного распределения вероятностей на сфере $S(\mathbf{r})$; $p(\mathbf{r})$ — вероятность обрыва цепи, определяемая выражением:

$$p(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in \Gamma_\varepsilon, \\ 1, & \mathbf{r} \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Как уже было указано, эта цепь называется «блужданием по сферам». Ее можно, очевидно, записать следующим образом: $P_n = P_{n-1} + \omega_n d(P_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, где ω_n — последовательность независимых изотропных векторов единичной длины. Нетрудно заметить, что вероятность $p_1(\mathbf{r})$ обрыва цепи после очередного перехода равна вероятности непосредственного попадания из точки \mathbf{r} в Γ_ε и удовлетворяет неравенству $p_1(\mathbf{r}) \geq v(\varepsilon)$. Отсюда находим, что среднее число переходов $q(P_0, \varepsilon)$, определяющее среднее время расчетов на ЭВМ, не превосходит $v^{-1}(\varepsilon)$.

В работе (Мюллер, 1956) показано, что траектория «блуждания по сферам» с вероятностью 1 сходится к границе области. Следовательно, для получения более

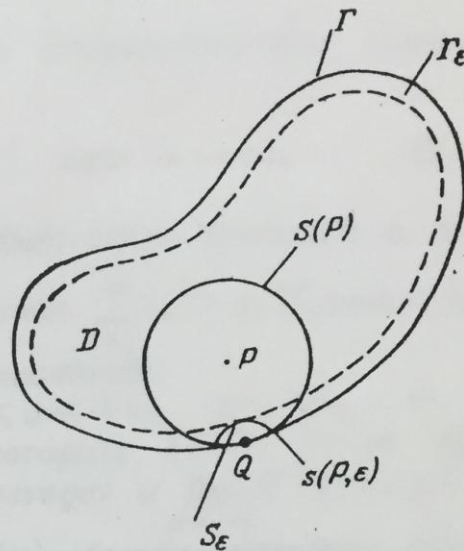


Рис. 1. Иллюстрация основных геометрических понятий, связанных с «блужданием по сферам».

точной оценки $q(P_0, \varepsilon)$ можно использовать оценки плотности $f(r)$ распределения среднего числа центров сфер $S(P_k)$ вблизи границы. Обозначим через x расстояние до границы. Соображения подобия показывают, что плотность $f(x)$ распределения среднего числа центров сфер по x с точностью до постоянного множителя должна быть близкой к x^{-1} . Отсюда вытекает соотношение

$q(P_0, \varepsilon) \leq c |\ln \varepsilon|$, которому в следующем параграфе мы придадим более точный смысл на основе теории восстановления, изучающей свойства последовательностей сумм независимых случайных величин.

§ 2.3. Среднее число шагов «блуждания по сферам» до попадания в ε -окрестность плоскости

1. Пусть D — полупространство, ограниченное плоскостью Γ . Обозначим $d_n = d(P_n)$, где $\{P_n\}$ — цепь «блуждания по сферам», начинающаяся в точке $P = P_0$. Величину $\ln d_n$ можно представить следующим образом:

$$\ln d_n = \ln \left(d_0 \prod_{k=1}^n \frac{d_k}{d_{k-1}} \right) = \ln d_0 + \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{d_k}{d_{k-1}} \right). \quad (2.2)$$

Для плоской границы величины $\ln(d_k/d_{k-1})$, очевидно, независимы и одинаково распределены; например, в трехмерном случае

$$d_k = d_{k-1} \cdot 2\alpha_k, \quad (2.3)$$

где α_k — независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $(0,1)$. Формула (2.3) следует из того, что проекция конечной точки изотропного единичного вектора на фиксированную ось в трехмерном случае распределена равномерно в соответствующем интервале (см., например, Феллер, 1967, с. 48).

Требуемые нам результаты теории восстановления (см., например, Кокс, Смит, 1967) содержатся в следующих утверждениях.

Лемма 1. Пусть $\{\eta_k\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $\mu < 0$, и

$$N_y = \min \left\{ n : \sum_{k=1}^n \eta_k < y \right\}, \quad y < 0.$$

Тогда справедливо следующее асимптотическое соотношение:

$$MN_y = \frac{y}{\mu} + o(|y|) \quad \text{при } y \rightarrow -\infty. \quad (2.4)$$

Обозначим через $H(y)$ среднее число значений n , для которых выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n \eta_k > y$. Принято называть $H(y)$ функцией восстановления.

Лемма 2. Пусть $\eta_k \leq a < +\infty$, $\mu = M\eta_k < 0$ и $M \exp(-c\eta_k) < +\infty$ для некоторого $c > 0$. Тогда при $y < 0$ производная $H(y)$ существует и $\lim_{y \rightarrow -\infty} H'(y) = |\mu|^{-1}$.

Заметим, что функцию $H'(y)$ обычно называют плотностью восстановления.

2. Далее определяются математические ожидания случайных величин $\eta_k^{(m)} = \ln(d_{k+1}/d_k)$ для различного числа измерений m и их асимптотика при $m \rightarrow \infty$. Будет проверено также выполнение условий леммы 2 для величин $\eta_k^{(m)}$.

Лемма 3. (Мюллер, 1956). Пусть D — m -мерное полупространство, ограниченное $(m-1)$ -мерной гиперплоскостью. Тогда

$$M(\eta_k^{(m)}) = M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m\right) = \ln 2 + \psi\left(\frac{m-1}{2}\right) - \psi(m-1) < 0, \quad (2.5)$$

где $\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz}$, $z > 0$; $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

В частности,

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m=2\right) = -\ln 2, \quad M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m=3\right) = \ln 2 - 1,$$

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m \text{ — нечетн. } m \geq 3\right) = \ln 2 - \sum_{j=\frac{m-1}{2}}^{m-2} \frac{1}{j}, \quad (2.6)$$

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m \text{ — нечетн. } m \geq 4\right) = -\ln 2 + \sum_{j=\frac{m}{2}}^{m-2} \frac{1}{j}.$$

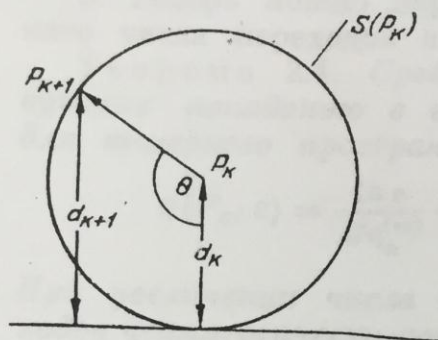


Рис. 2. К определению угла θ .

Доказательство. Обозначим через θ угол между нормалью к гиперплоскости и вектором, направленным из точки P_k в точку P_{k+1} (рис. 2).

Легко видеть, что $\cos \theta = (d_k - d_{k+1})/d_k$. Следовательно, $(d_{k+1}/d_k) = 1 - \cos \theta$. Известно, что если точка P_{k+1} выбирается равномерно по поверхности гиперсферы

$S(P_k)$, то плотность распределения θ пропорциональна $\sin^{m-2} \theta$ (это нетрудно проверить методом индукции). Значит,

$$M \left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m \right) = \frac{\int_0^\pi \ln(1 - \cos \theta) \sin^{m-2} \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin^{m-2} \theta d\theta}. \quad (2.7)$$

Эта величина отрицательна, так как

$$\int_0^\pi \ln(1 - \cos \theta) \sin^{m-2} \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \ln(1 - \cos^2 \theta) \sin^{m-2} \theta d\theta < 0.$$

Сделав в верхнем интеграле выражения (2.7) преобразования

$$1 - \cos \theta = 2 [\sin(\theta/2)]^2, \quad \sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

и замену переменной $\sin(\theta/2) = x$, находим:

$$M \left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m \right) = \ln 2 + \frac{2^m \int_0^1 x^{m-2} (1-x^2)^{\frac{m-3}{2}} \ln x dx}{\int_0^\pi \sin^{m-2} \theta d\theta}.$$

Известно (Градштейн, Рыжик, 1963, с. 383, 552), что

$$\int_0^L x^{\mu-1} (1-x^2)^{\nu-1} \ln x dx = \frac{1}{r^2} B\left(\frac{\mu}{r}, \nu\right) \left[\psi\left(\frac{\mu}{r}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{r} + \nu\right) \right],$$

$$\int_0^\pi \sin^{\mu-1} x dx = 2^{\mu-1} B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right), \quad \mu - \text{натуральное.}$$

Используя эти выражения, с учетом равенств $\frac{\mu}{2} = \nu =$
 $= \frac{\mu}{r} = \frac{m-1}{2}$ сразу получаем (2.5). Окончательное выра-
 жение для нечетного m следует из соотношения (Град-
 штейн, Рыжик, 1963, с. 959):

$$\psi(z+n) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n-1} + \psi(z), \quad n=1,2,\dots,$$

а для четного m нужно дополнительно использовать ра-
 венство

$$\psi(2) = \frac{1}{2} \left[\psi + \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \ln 2 \quad \text{при } 2z = m - 1.$$

Лемма 4 (Мюллер, 1965). *Справедливо следующее*
асимптотическое равенство:

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \middle| m\right) = -\frac{1}{2m} + O\left(\frac{1}{m}\right) \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Доказательство. Известно, что

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} M\left(\ln \frac{d_{k-1}}{d_k} \middle| m+1\right) &= \ln 2 + \psi\left(\frac{m}{2}\right) - \psi(m) = \\ &= \ln 2 + \ln m - \ln 2 - \frac{1}{m} - \ln m + \frac{1}{2m} + O(m) = -\frac{1}{2m} + O(m). \end{aligned}$$

Очевидно, что последнее соотношение эквивалентно ут-
 верждению леммы.

Лемма 5. Если $c < \frac{1}{2}$, то $M \exp(-c\eta_k^{(m)}) < +\infty$.

$\forall m$.

Доказательство следует из соотношения:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin^{m-2} \theta \exp[-c \ln(1 - \cos \theta)] d\theta = \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin^{m-2} \theta d\theta}{(1 - \cos \theta)^c} \leq \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 - \cos \theta)^c} < +\infty \quad \forall c < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Теперь можно перейти к изучению свойств среднего числа переходов в цепи «блуждания по сферам». Теорема 2.1. Среднее число переходов, предшествующих попаданию в ε -окрестность плоской границы, для m -мерного пространства выражается формулой

$$q(P_0, \varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{M\eta_k^{(m)}} + O(|\ln \varepsilon|) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

При увеличении числа измерений среднее число переходов асимптотически растет, как $2m$.

Доказательство. Соотношение (2.9) сразу следует из (2.4) и леммы (1), так как $d_n < \varepsilon$ эквивалентно $\ln d_n < \ln \varepsilon$ и $\mu = M\eta_k^{(m)} < 0$. Второе утверждение является следствием леммы 4.

Полезно заметить, что в наиболее важном для метода Монте — Карло случае трехмерного пространства имеем

$$q(P_0, \varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2 - 1} + O(|\ln \varepsilon|) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Теорема 2.2. Плотность распределения среднего числа центров сфер S_n в случае плоской границы

$$f(x) = \frac{1}{|M\eta_k^{(m)}|} \frac{1}{x} + O(x^{-1}), \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

где x — расстояние до границы.

Доказательство. Из лемм 2 и 5 следует, что плотность $h(y)$ распределения среднего числа значений $\ln d_n$ при $y < 0$ существует и выражается формулой

$$h(y) = \frac{1}{|M\eta_k^{(m)}|} + O(1) \text{ при } y \rightarrow -\infty.$$

Отсюда получаем (2.11), так как $f(x) = h(\ln x) \cdot x^{-1}$.

В следующем параграфе оценка вида $m(P_0, \varepsilon) \leq c|\ln \varepsilon|$ будет строго доказана для практически произвольных двумерных и некоторых типов трехмерных областей. Однако эвристические соображения, приведенные в конце предыдущего параграфа, показывают, что она должна выполняться для всех реальных границ. Поэтому в дальнейшем для оценки трудоемкости алгоритмов «блуждания по сферам» будут использоваться асимптотические равенства типа (2.9) и (2.11).

§ 2.4. Вывод оценки
среднего числа шагов
для некоторых типов областей

Символом d^* далее будем обозначать максимальный радиус сфер, целиком помещающихся в области D .

1. Получим оценку величины $q(P_0, \varepsilon)$ для двумерных областей.

Теорема 2.3. Если любой точки границы $\Gamma(D)$ на плоскости можно коснуться извне углом величины $\gamma > 0$, то выполняется оценка:

$$q(P_0, \varepsilon) \leq \left(\frac{\gamma \ln \cos \frac{\gamma}{4}}{4\pi} \right)^{-1} \ln \varepsilon + O(|\ln \varepsilon|).$$

Эта оценка сохраняется, если рассматривать угол со сторонами длины $d^* \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right)$.

Лемма 6. Пусть $r(\theta)$ — расстояние от точки окружности $x^2 + y^2 = 1$ с координатами $(\cos \theta, \sin \theta)$ до некоторой фиксированной точки, лежащей на расстоянии $b \geq 1$ от центра окружности (рис. 3). Тогда, если θ равномерно распределен в интервале $(0, 2\pi)$, то $M \ln [r(\theta)/b] = 0$.

Доказательство. В качестве фиксированной рассмотрим точку с координатами $(b, 0)$. Тогда $r(\theta) = (1 + b^2 - 2b \cdot \cos \theta)^{1/2}$ и

$$M \ln [r(\theta)/b] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln (1 + b^{-2} - 2b^{-1} \cos \theta) d\theta.$$

Последний интеграл равен нулю для любого $b \geq 1$ (Градштейн, Рыжик, 1963, с. 541).

Лемма 7. Пусть угол величины $\gamma > 0$, биссектриса которого совпадает с осью x , своей вершиной касается окружности $x^2 + y^2 = 1$ в точке $(1, 0)$ и пусть $h(\theta)$ — расстояние от точки $(\cos \theta, \sin \theta)$ до одной из сторон угла (рис. 4). Тогда, если θ равномерно распределен в интервале $(0, 2\pi)$, то $M \ln h(\theta) < 0$ и $|M \ln(\theta)| \geq \gamma |\ln \cos(\gamma/4)| / 4\pi$.

Доказательство. Легко видеть, что касательная к окружности в точке $\left(\cos \frac{\gamma}{2}, \sin \frac{\gamma}{2} \right)$ перпендикулярна к верхней стороне угла, до которой будем вычислять расстояние $h(\theta)$. Учитывая это, получаем, что при $\theta \leq \gamma/2$

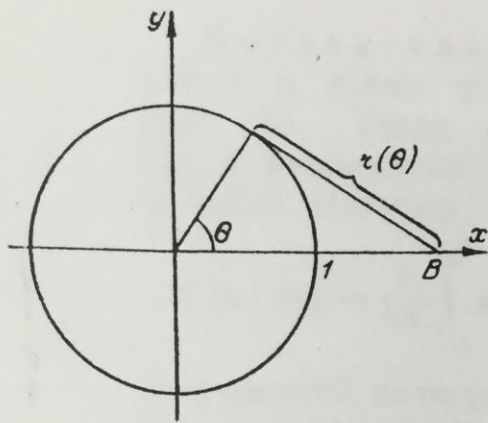


Рис. 3. К доказательству леммы 6.

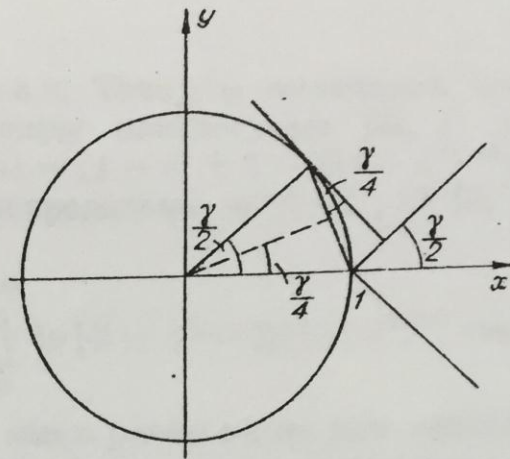


Рис. 4. К доказательству леммы 7.

выполняется соотношение

$$\frac{h(\theta)}{r(\theta)} \leq \frac{h(\gamma/2)}{r(\gamma/2)} = \cos\left(\frac{\gamma}{4}\right),$$

где $r(\theta)$ — расстояние от точки $(\cos \theta, \sin \theta)$ до точки $(1, 0)$. Отсюда

$$\int_0^{\gamma/2} \ln [h(\theta)/r(\theta)] d\theta \leq \frac{\gamma \ln \cos(\gamma/4)}{2}.$$

Используя лемму 6 и последнее неравенство, имеем

$$\begin{aligned} M \ln h(\theta) &= M \ln r(\theta) + M \ln [h(\theta)/r(\theta)] = M \ln [h(\theta)/r(\theta)] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln [h(\theta)/r(\theta)] d\theta \leq \frac{\gamma \ln \cos(\gamma/4)}{4\pi}, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму 7.

Доказательство теоремы 2.3. Пусть окружность $S(P_k)$ касается границы Γ в точке Q_k . Согласно условию теоремы, существует угол величины γ , который касается границы в этой же точке извне (рис. 5).

Кроме него рассмотрим вспомогательный угол величины γ с вершиной в точке Q_k , для которого отрезок $\overline{P_k Q_k}$ является продолжением биссектрисы. Обозначим через $t(p)$ расстояние от точки p до ближайшей к окружности (на рис. 5 — верхней) стороны внешнего угла, а че-

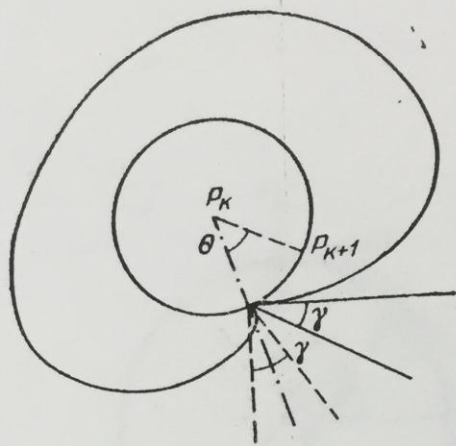


Рис. 5. К доказательству теоремы 2.3.

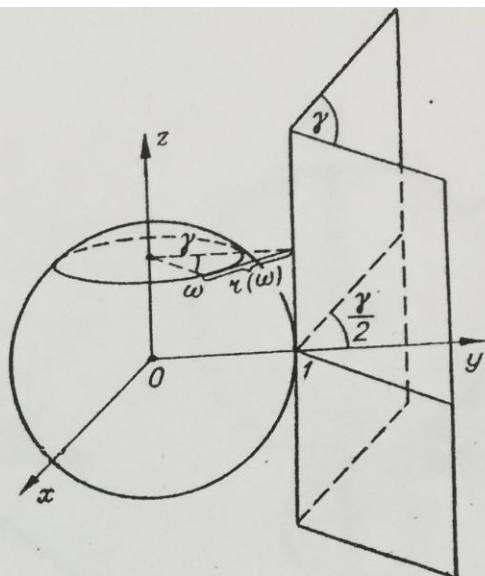


Рис. 6. К доказательству леммы 8.

рез $h(P)$ — расстояние до соответствующей стороны вспомогательного угла. Нетрудно показать, что

$$d(P_{k+1}) \leq t(P_{k+1}) \leq h(P_{k+1}),$$

$$\ln d(P_n) \leq \ln d(P_0) + \sum_{k=1}^n \ln \frac{h(P_k)}{d(P_{k-1})} = \xi_n.$$

Следовательно, из $\xi_n < \ln \varepsilon$ следует $\ln d(P_n) < \ln \varepsilon$. Отсюда, используя лемму 7 и лемму 1 из § 2.3, получаем требуемую оценку. Из доказательства леммы 7 следует, что указанным способом достаточно мажорировать величину $d(P_{k+1})$ лишь при $0 \leq \theta \leq \frac{\gamma}{2}$, используя для других значений θ в качестве мажоранты расстояния до точки P_k . Это рассуждение доказывает последнее утверждение теоремы.

2. Теперь получим оценки величины $q(P_0, \varepsilon)$ для некоторых типов трехмерных областей.

Теорема 2.4. Если любой точки границы $\Gamma(D)$ в трехмерном пространстве можно коснуться двугранным углом раствора $\gamma > 0$, то выполняется оценка $q(P_0, \varepsilon) \leq c |\ln \varepsilon| + o(|\ln \varepsilon|)$ при некотором $c > 0$. Эта оценка сохраняется, если рассматривать угол со сторонами ширины $d^* \cdot \sin(\gamma/2)$.

Лемма 8. Пусть точка ω равномерно выбирается по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $r(\omega)$ — расстояние этой точки до прямой $(x = 0, y = 1)$. Тогда $M \ln r(\omega) = 0$.

Доказательство. Точку ω определим координатой z и углом φ между плоскостями (ω, z) и (y, z) (рис. 6). Тогда $r(\omega) = [1 - z^2 + 1 - 2(1 - z^2)^{1/2} \cos \varphi]^{1/2}$, где z равномерно распределено в $(-1, +1)$, а φ — в $(0, 2\pi)$. Поэтому

$$M \ln r(\omega) = \frac{1}{8\pi} \int_{-1}^{+1} dz \int_0^{2\pi} \ln [2 - z^2 - 2(1 - z^2)^{1/2} \cos \varphi] d\varphi.$$

Внутренний интеграл здесь равен нулю для любого $z^2 < 1$ (см. доказательство леммы 6). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть двугранный угол раствора $\gamma > 0$, «биссектрисная» плоскость которого совпадает с плоскостью (y, z) , своим ребром касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в точке $(0, 1, 0)$ и пусть $h(\omega)$ — расстояние от точки ω до указанного угла (см. рис. 6). Тогда, если точка ω равномерно распределена по поверхности сферы, то $M \ln h(\omega) < 0$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$M \ln h(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} dz' \int_0^{2\pi} \ln h_1(z', \varphi) d\varphi,$$

где $h_1(z', \varphi)$ — расстояние от ω до угла, образуемого пересечением плоскости $z = z'$ с рассматриваемым двугранным углом. Функция $f(z') = \int_0^{2\pi} \ln h_1(z', \varphi) d\varphi$ непрерывна и $f(0) < 0$ в силу леммы 7. Из этого вытекает требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 2.4 следует из лемм 8, 9 точно так же, как доказательство теоремы 2, 3 из лемм 6, 7.

Достаточно ясным, но сложным путем здесь можно получить грубую оценку величины c , которая вряд ли имеет какое-либо практическое значение.

Теорема 2.5. Если любой точки границы $\Gamma(D)$ можно коснуться извне конусом раствора $\gamma > 144^\circ$, то выполняется оценка $q(P_0, \varepsilon) \leq c |\ln \varepsilon| + o(|\ln \varepsilon|)$ при некотором $c > 0$. Эта оценка сохраняется, если рассматривать конус с образующей длины $d^* \sin(\frac{\gamma}{2})$.

Лемма 10. Пусть конус раствора γ касается своей вершиной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в точке $(0, 1, 0)$, как

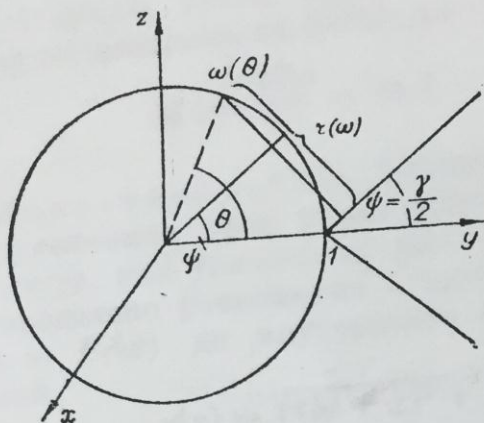


Рис. 7. К доказательству леммы 10.

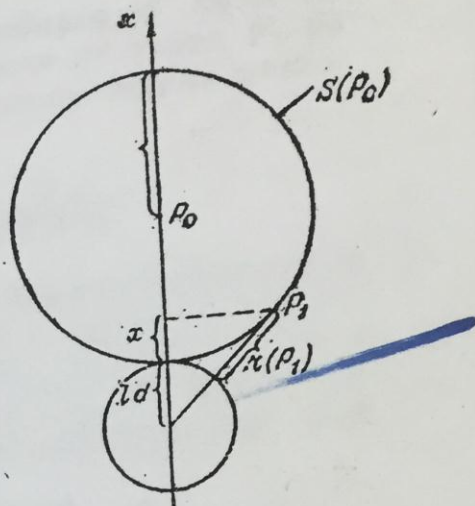


Рис. 8. К доказательству леммы 11.

указано на рис. 7, и пусть $r(\omega)$ — расстояние от случайной точки ω на сфере до конуса. Тогда $M \ln r(\omega) < 0$ при $\gamma > 144^\circ$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда ось конуса совпадает с осью y . Пусть угол θ отсчитывается от оси y . При $\theta \leq \psi = 2\psi$ (см. рис. 7) расстояние от точки $\omega(\theta)$ до конуса реализуется по нормали к образующей и равно $\sin \psi + \sin(\theta - \psi)$. При $\theta > 2\psi$ такое расстояние равно $(2 - 2\cos \theta)^{1/2}$. В данном случае $\cos \theta$ распределен равномерно в $(-1, +1)$, поэтому можно сделать замену: $\cos \theta = 1 - 2\alpha$, где α — число, равномерно распределенное в $(0, 1)$. Из сказанного имеем:

$$M \ln r[\omega(\alpha)] = \int_{(1-\mu)/2}^1 \left(\ln 2 + \frac{\ln \alpha}{2} \right) d\alpha + \int_0^{(1-\mu)/2} \ln [\sin \psi + \sin(\theta(\alpha) - \psi)] d\alpha,$$

где $\mu = \cos 2\psi$. Преобразуя записанные интегралы, приходим к выражению:

$$M \ln r(\omega) = \frac{1}{2} \left[2 \ln 2 - 1 + 2 \int_0^{(1-\mu)/2} \ln ((1 - \alpha)^{1/2} \cos \psi + \alpha^{1/2} \sin \psi) d\alpha = F(\psi). \right]$$

Расчеты показали, что $F(142^\circ) = 0,086$, а $F(144^\circ) = -0,0019$. Отсюда, учитывая монотонность $F(\psi)$, получаем утверждение леммы в случае, когда ось конуса совпадает с осью y . Соображения симметрии показывают, что такой случай дает минимальное значение величины $M \ln r$ при данном ψ . Для $\psi = 144^\circ$ это было проверено прямыми вычислениями для различных углов между осью конуса и осью x . Следовательно, с учетом монотонной зависимости величины $M \ln r$ от ψ можно считать лемму 10 доказанной.

Доказательство теоремы 2.5. Пусть сфера $S(P_k)$ касается границы Γ в точке Q_k . Согласно условию теоремы, существует конус раствора $\gamma > 144^\circ$, который касается границы извне в этой же точке. Пусть $h(P)$ — расстояние от точки P до этого конуса. Тогда $d(P) \leq h(P)$ и

$$\ln d(P_n) = \ln d(P_0) + \sum_{k=1}^n \ln \frac{d(P_k)}{d(P_{k-1})} \leq \ln d_0 + \sum_{k=1}^n \ln \frac{h(P_k)}{d(P_{k-1})}.$$

Случайные величины $\eta_k = \ln[h(P_k)/d(P_{k-1})]$ здесь не одинаково распределены и зависимы, но обладают следующими свойствами.

А. Условные математические ожидания η_k относительно «прошлого» в силу леммы 10 отрицательны; их можно сделать одинаковыми, подходящим способом увеличив значения $h(P)$, если ось конуса не направлена по диаметру сферы.

Б. Величины дисперсий η_k равномерно ограничены, поскольку $h(P_k) \geq r(P_k)$, где $r(P_k)$ — расстояние от P_k до плоскости, касающейся сферы S_k в точке Q_k , а $D(r/d) = c < +\infty$.

Достаточно ясно, что для случайных величин η_k после указанной в А модификации должно выполняться утверждение типа леммы 1. Это утверждение сформулировано в работе Кокса, Смита (1967). Следовательно, теорема 2.5 доказана.

Теорема 2.6. Если любой точки границы $\Gamma(D)$ можно коснуться извне шаром радиуса ld^* , то при $l > (\ln 2 - 0,5)/(1 - \ln 2)$ выполняется оценка

$$q(P_0, \varepsilon) \leq \{\ln 2 - 1 + [2(l+1)]^{-1}\}^{-1} \ln \varepsilon + o(|\ln \varepsilon|).$$

Лемма 11. Пусть сфера $S(P_0)$ радиуса d касается сферы радиуса $l \cdot d$ и $r(P_1)$ — расстояние от точки P_1 до второй сферы. Тогда, если точка P_1 распределена равномерно по поверхности $S(P_0)$, то

$$M \ln \frac{r(P_1)}{d} = \ln 2 - 1 + \frac{1}{2(l+1)}.$$

Доказательство. Поместим начало координат в точку касания сфер и направим ось x вдоль их общего диаметра, как указано на рис. 8. Тогда $P_1 = P_1(x)$, где x распределено равномерно в интервале $(0, 2d)$, а расстояние от $P_1(x)$ до внутреннего шара определяется формулой

$$r(x) = \sqrt{(ld+x)^2 + x(2d-x)} - ld.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M \ln \frac{r(P_1)}{d} &= \frac{1}{2d} \int_0^{2d} \ln \frac{\sqrt{2d(l+1)x + l^2d^2} - ld}{d} dx = \\ &= \frac{1}{2d} \int_0^{2d} \ln \left(\sqrt{\frac{2(l+1)}{d}x + l^2} - l \right) dx. \end{aligned}$$

Делая замену переменных

$$t^2 = \frac{2(l+1)}{d}x + l^2, \quad dx = \frac{d \cdot t}{l+1} dt,$$

получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(l+1)} \int_l^{l+2} t \ln(t-l) dt &= \frac{1}{2(l+1)} \int_0^2 (z+l) \ln z dz = \\ &= \frac{1}{2(l+1)} \left(\frac{z^2}{2} \ln z - \frac{z^2}{4} \right) \Big|_0^2 + \\ &+ \frac{l}{2(l+1)} (z \ln z - z) \Big|_0^2 = \ln 2 - 1 + \frac{1}{2(l+1)}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.6. При $l > (\ln 2 - 0.5)(1 - \ln 2)^{-1}$ величина (2.12) отрицательна; доказа-

тельство строится по аналогии с теоремой 2.3 путем рассмотрения вспомогательных сфер радиуса $d(P_k) \cdot l$.

3. В заключение этого параграфа найдем общую оценку величины $q(P_0, \varepsilon)$ для выпуклых областей.

Теорема 2.7. Среднее число переходов, предшествующих попаданию в ε -окрестность выпуклой границы $\Gamma(D)$, для m -мерного пространства удовлетворяет неравенству

$$q(P_0, \varepsilon) \leq \frac{\ln \varepsilon}{M\eta_k^{(m)}} + o(|\ln \varepsilon|) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $M\eta_k^{(m)}$ определяются соотношением (2.5).

Доказательство. Пусть Q — точка, в которой сфера $S(P_k)$ касается границы. Если точек касания несколько, то можно в качестве Q_k рассмотреть любую из них. В силу выпуклости Γ через Q_k можно провести плоскость Ω_k , лежащую вне D . Эта плоскость, очевидно, имеет со сферой $S(P_k)$ лишь одну общую точку и, следовательно, является касательной плоскостью. Поэтому она перпендикулярна к отрезку $\overline{P_k Q_k}$. Граница Γ лежит между $S(P_k)$ и Ω_k , следовательно, $d_{k+1} = d(P_{k+1}) \leq h_{k+1}$, где h_{k+1} — расстояние от P_{k+1} до плоскости Ω_{k+1} . Далее

$$d_n = d_0 \prod_{k=1}^n \frac{d_k}{d_{k-1}} \leq d_0 \prod_{k=1}^n \frac{h_k}{d_{k-1}}.$$

Следовательно,

$$\ln d_n = \ln d_0 + \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{d_k}{d_{k-1}} \right) \leq \ln d_0 + \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{h_k}{d_{k-1}} \right).$$

Случайные величины $\ln(h_k/d_{k-1})$ независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием $M\eta_k^{(m)}$.

Теорема доказана.

В заключение этой главы сделаем несколько замечаний приоритетного характера. Логарифмическая оценка: $q(P_0, \varepsilon) \sim (|\ln \varepsilon|)$ для среднего числа переходов в цепи «блуждания по сферам» была впервые получена Елеповым и Михайловым (1969) на основе оценки $c \cdot x^{-1}$ для плотности среднего числа центров сфер вблизи границы. Затем по совету А. А. Боровкова здесь была использована теория восстановления для сумм (2.2), выражающая $\ln d_n$. Интересно отметить, что такие суммы и величины $M \ln(d_{k+1}/d_k)$ изучались Мюллером (1956), но логарифмическая оценка в его работе не дана.